Антонов Артём Игоревич

Муниципальное общеобразовательное учреждение

Средняя школа №100 с углублённым изучением отдельных предметов

Ленинского района города Нижнего Новгорода

РАЗРАБОТКА УРОКА ПО ГЕОМЕТРИИ «ТРЁХГРАННЫЙ УГОЛ».

10 класс

<u>Тема урока:</u> «Трехгранный угол».

<u>Тип урока:</u> Урок решения задач.

<u>Учебная задача:</u>

- Формировать умения:

— использовать теорему о сумме плоских углов трёхгранного угла и неравенство треугольника для трёхгранного угла для доказательства существования трёхгранного угла и оценки величин плоских углов трёхгранного угла;

— применять свойство трёхгранного угла, у которого два плоских острых угла равны, для нахождения метрических соотношений между элементами трёхгранного угла (угла наклона общего ребра равных плоских углов к противоположной грани и т.д.);

— осуществлять приём достраивания до многогранника для решения задач;

- Ознакомить учеников с новым свойством трёхгранного угла: если плоские углы трёхгранного угла равны, то прямая, составляющая равные углы со всеми его гранями, составляет равные углы со всеми его рёбрами, а любая точка этой прямой равноудалена от его граней и его рёбер.

В результате ученик:

- Умеет находить различные метрические соотношения между элементами трёхгранного угла:
  - Оценивать величину плоских углов трёхгранного угла, используя теорему о сумме плоских углов трёхгранного угла и неравенство треугольника для трёхгранного угла;
  - Доказывать существование трёхгранного угла, используя эти теоремы;
  - Применяя свойство трёхгранного угла, у которого два плоских острых угла равны, находить метрические соотношения между элементами трёхгранного угла (угол наклона общего ребра равных плоских углов к противоположной грани и т.д.);
- Знает и умеет доказывать свойства трёхгранного угла, у которого три угла прямые (находить величину двугранных углов, угол между биссектрисами и т.д.);
- Знает свойство трёхгранного угла: если плоские углы трёхгранного угла равны, то прямая, составляющая равные углы со всеми его гранями, составляет равные углы со всеми его рёбрами, а любая точка этой прямой равноудалена от его граней и его рёбер.
- Знает и понимает сущность метода достраивания при решении геометрических задач.

Методы обучения:

По степени взаимодействия учителя и учащихся – эвристическая беседа;

по характеру познавательной деятельности учителя и учащихся и участия учителя в учебном процессе – частично-поисковый метод.

КМО урока:

- Учебник И.Ф. Шарыгин «Геометрия 10-11».
- Оборудование: компьютер, мультимедийный проектор.
- Наглядные пособия: мультимедийная презентация по теме.
- Дидактический материал: раздаточные таблицы «Трёхгранные углы».

Структура урока:

1. Мотивационно-ориентировочный этап (повторение и мотивация к дальнейшей деятельности) – 12 мин.
2. Операционно-познавательный этап (решение учебной задачи урока, в данном случае – непосредственное решение группы задач) – 30 мин.
3. Рефлексивно-оценочный этап (рефлексия, осмысление результатов деятельности и оценка собственной деятельности) – 3 мин.

Ход урока:

Вопросы учителя	Ответы учеников

1. Мотивационно-ориентировочный этап.

Здравствуйте, чем мы с вами занимались на прошлом уроке?	Мы учились решать задачи по теме «Трехгранный угол».

Как мы с вами знаем, этот геометрический объект имеет множество свойств, которые необходимы для решения задач. Поэтому сейчас мы повторим изученный теоретический материал (в устной форме).	

Сформулируйте определение трёхгранного угла.	Трёхгранный угол – это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости.

Упражнение 1(устно). Существует ли трёхгранный угол с плоскими углами, равными соответственно $105°, 145°, 135°$ (для экономии времени тексты задач и упражнений предъявляются на слайдах презентации)?

Какой установленный нами теоретический факт поможет решить эту задачу?	Эту задачу можно решить, используя теорему о сумме плоских углов трехгранного угла: Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше $360°$. $105° + 145° + 135° = 385° > 360°$, значит, такого трёхгранного угла не существует.

Упражнение 2 (устно). Сумма плоских углов α, β, γ трёхгранного угла равна 180°. Докажите, что любой из плоских углов такого трёхгранного угла острый.

Обратите внимание на условие задачи. Какой метод решения целесообразно использовать в этом случае (в условии задачи присутствует квантор всеобщности)?	В таких случаях обычно используется метод от противного.

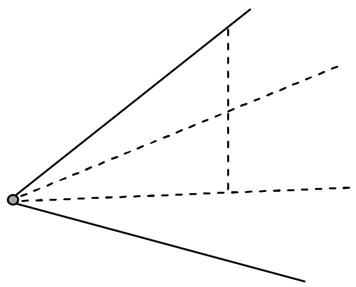
Как переформулировать тогда требование задачи?	Предполагаем, что хотя бы один из углов α, β, γ больше либо равен 90°.

Пусть для определённости это будет угол γ. Что можно сказать о градусной величине суммы двух других углов?	$\alpha+\beta+\gamma=180°$, Так как $\gamma \geq 90°$, то $\alpha+\beta \leq 90$.

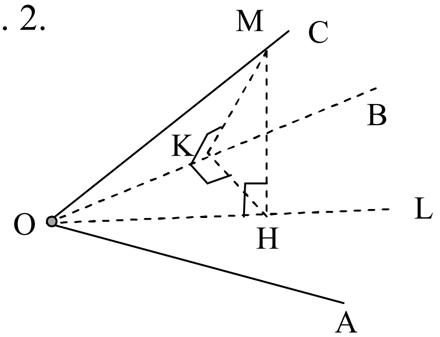
В этой задаче требование теоремы о сумме плоских углов трёхгранного угла соблюдается. Какой еще теоретический факт нам известен о соотношениях плоских углов трёхгранного угла?	Любой из плоских углов трёхгранного угла меньше суммы двух остальных: $\gamma<\alpha+\beta$ Но $\alpha+\beta \leq 90°$, следовательно, $\gamma<90°$. Получили противоречие. Значит, любой из плоских углов данного трёхгранного угла является острым.

Упражнение 3. Плоские углы α, β, γ, трёхгранного угла равны соответственно 60°, 45°, 30°. Найдите величину двугранного угла противолежащего углу α. (письменно, к доске вызывается ученик, записывает теорему косинусов для трёхгранного угла и вычисляет, параллельно ведутся в записи в тетрадях).	По теореме косинусов для трёхгранного угла: $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\bar{a}$ $\cos\bar{a} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

В трёхгранном угле два плоских угла (оба угла – острые) равны. Куда проектируется их общее ребро?	Из теоремы о свойстве трёхгранного угла, у которого два плоских угла равны. Их общее ребро проектируется на биссектрису третьего плоского угла (рис.1).

Мы с вами уже много уроков подряд изучаем тему «Расстояния и углы в пространстве», решаем метрические задачи на нахождение различных углов и расстояний. Сейчас мы познакомились с новым для нас геометрическим объектом – трёхгранным углом. Интересно, а какие метрические соотношения существуют для трёхгранного угла? Вы уже назвали их достаточно, решая задачи, но существуют еще довольно много интересных свойств трёхгранного угла, и мы попытаемся некоторые из них выявить, решая задачи. Сформулируйте цель нашего урока.	 Рис.1. Учиться решать задачи по теме «Трёхгранный угол» и на задачах подметить его новые свойства.

2. Операционно-познавательный этап.

Задача 1. В трёхгранном угле два плоских угла раны по 60°, а третий угол – прямой. Найдите угол наклона ребра, противолежащему прямому плоскому углу к плоскости этого угла. Рис. 2.  *Дано:* $OABC$*- трёхгранный угол,* $\angle BOC = \angle AOC = 60°$ $\angle AOB = 90°$ *Угол между ребром* OC *и плоскостью* ABC.

(К доске вызывается ученик, изображает трёхгранный угол, вводит обозначения, записывает «дано», «найти», параллельно ведутся записи в тетрадях). Сформулируйте определение угла между прямой и плоскостью.	Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Следовательно, для того чтобы построить угол между ребром OC и плоскостью ABC, что необходимо знать?	Проекцию ребра OC на плоскость AOB.

Обратите внимание на условие задачи. Можем ли мы по нему сказать, куда проектируется ребро OC?	Ребро OC проектируется на биссектрису грани AOB (рис.2). Следовательно, искомый угол - $\angle COL$, где OL – биссектриса угла AOB.

Вспомним, как мы строим проекции фигур на данную плоскость.	Мы из каждой точки фигуры проводим перпендикуляры к данной плоскости.

В нашей задаче искомый угол мы построили. Можем ли мы теперь найти его величину?	Нет, пока не можем.

Значит нужно использовать какие-то дополнительные построения, то есть поместить данный угол в какую-то геометрическую фигуру. Как это сделать (вспомните, что прямая OL является проекцией ребра OC)?	Нужно поместить этот угол в прямоугольный треугольник: из произвольной точки M ребра OC провести перпендикуляр MH к плоскости ABC. По определению проекции фигуры на плоскость, MH будет лежать в плоскости COL.

Известны ли какие-нибудь элементы треугольника MOH?	Нет, неизвестны.

Значит, нам необходимы линейные элементы. Пусть $OM = a$. Теперь OH или MH нужно выражать через a. Как это сделать? Вспомним, что у нас ещё не использованы углы $\angle MOB = 60°$ и $\angle BOH = 45°$. Значит, их тоже нужно поместить в треугольники. Как это сделать, если известно, что MH - перпендикуляр к плоскости AOB?	Из точки H в плоскости AOB нужно провести перпендикуляр HK к ребру OB, например, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $MK \perp BC$.

Сравните отрезки HK и OK в треугольнике KOH.	Треугольник KOH – прямоугольный равнобедренный: $HK = OK$

Как теперь найти OH?	Гипотенуза $OH = \sqrt{2}OK$.

Как теперь выразить OK через a.	В прямоугольном треугольнике MOK $OK = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2}a$, так как угол $KMO = 30°$. Тогда $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

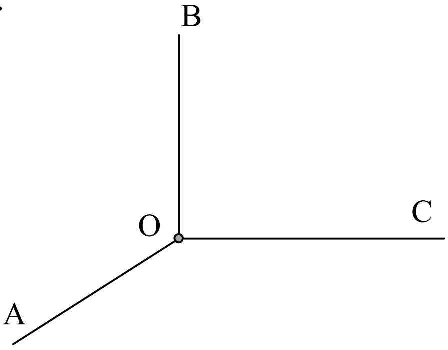
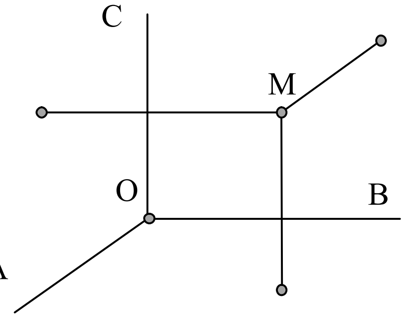
Найдите угол $\angle MOH$.	В прямоугольном треугольнике MOH $\angle MOH = arccos\frac{OH}{OM} = 45°$.

Что запишем в тетрадях?	1. *Ребро* OC *проектируется на биссектрису грани* AOB. 2. $M \in OC,\ MH \perp ABC$. 3. $H \in AOB,\ HK \perp OB$, *тогда по теореме о трёх перпендикулярах* $MK \perp BC$. 4. $\triangle\ KOH: HK = OK,\ OH = \sqrt{2}OK$. 5. $\triangle\ MOK:\ OK = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2}a$, $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 6. $\triangle\ MOH: \angle MOH = arccos\frac{OH}{OM} = 45°$.

Задача 2. Все плоские углы трёхгранного угла прямые.
Найдите:

а) Все его двугранные углы;
б) Расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трёхгранного угла и удалённой от всех его граней на расстояние a;
в) Расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трёхгранного угла и удалённой от всех его рёбер на расстояние $a\sqrt{2}$;
г) Углы между биссектрисами плоских углов;
д) Угол, который образует с плоскостью боковой грани луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его гранями равные углы;
е) Угол, который образует с ребром трёхгранного угла луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его рёбрами равные углы.

(К доске по очереди вызываются ученики, работа ведётся фронтально).

Пусть дан двугранный угол $OABC$. Найдите двугранный угол, например, при ребре OB? Рис.3.  Запишем, что дано в задаче 2. *Дано:* $OABC$*- трёхграный угол,* $\angle BOC = \angle AOC = \angle AOB = 90°$ *а)* $\widehat{OA}, \widehat{OB}, \widehat{OC}$*;* *б)* $OM, d(M, AOC) = d(M, AOB) = d(M, BOC) = a$*;* *в)* $OL, d(L, OC) = d(L, OB) = d(L, OA) = a\sqrt{2}$*;* *г) Углы между биссектрисами плоских углов;* *д)* $\widehat{OK, AOB} = \widehat{OK, AOC} = \widehat{OK, BOC} = ?$ е) $\widehat{OS, AO} = \widehat{OS, OC} = \widehat{OS, BO} = ?$	Поскольку OC и OA перпендикулярны к OB, то $\llcorner COA$ есть линейный для двугранного угла при ребре OB, $\llcorner COA = 90°$, а значит двугранный угол при ребре OB равен 90°. Аналогично находим двугранные углы при ребрах OC и OA, они также равны 90°. Рис.4. 

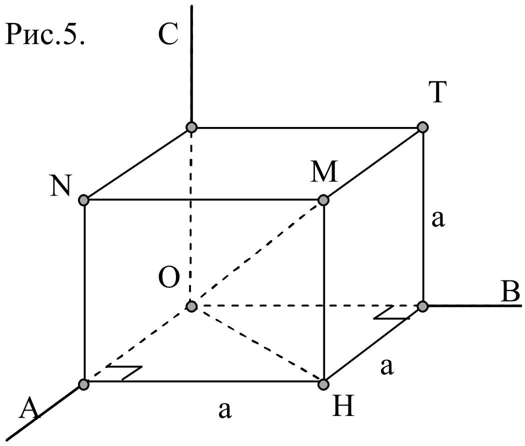
Запишем решение задачи а).	*1.* $OC \perp OB$ $OA \perp OB$, *значит,* $\llcorner COA$ *есть линейный для двугранного угла при ребре* OB. 2. $\llcorner COA = 90°$, *а значит, двугранный угол при ребре* OB *равен* 90°.

Переходим к задаче б). Что означает, что точка удалена от всех граней трёхгранного угла на расстояние a.	Это значит, что расстояние от точки М до плоскости любой грани равно a.

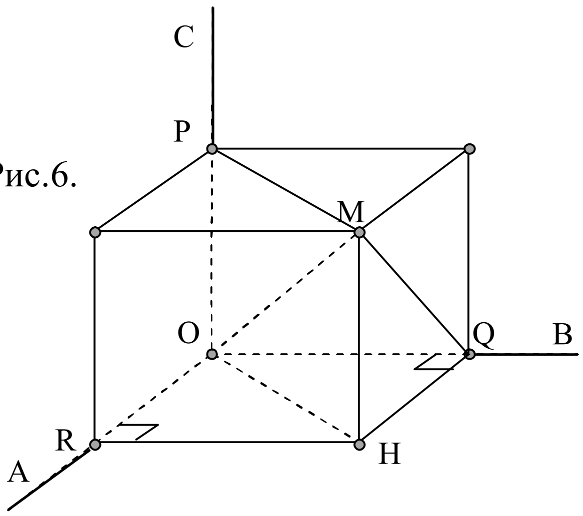
Сформулируйте определение расстояния от точки до плоскости.	Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Проведите из точки M перпендикуляры к граням трёхгранного угла (рис.4). Мы будем проводить их произвольно?	Нет, не произвольно, а параллельно соответствующему ребру трёхгранного угла.

Какую уже давно известную нам геометрическую фигуру напоминает вам наш рисунок?	Рисунок напоминает куб, поскольку длины перпендикуляров равны между собой.

В таких случаях бывает удобным приём достраивания до куба со стороной, равной a (в результате приходят к рисунку 5). Как тогда найти OM?	Рис.5.  OM – диагональ куба, значит $OM = a\sqrt{3}$

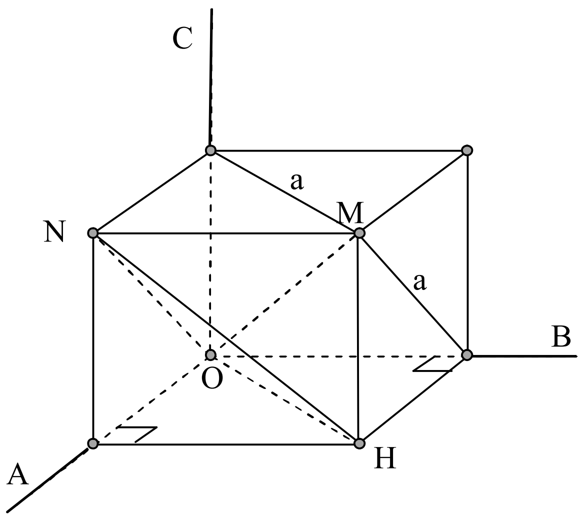
Что запишем в тетрадях?	1. *$MT \perp COB$, $MN \perp COA$, $MH \perp AOB$ ($MT \parallel AO, MN \parallel OB, MH \parallel OC$).* 2. *Достраиваем получившуюся фигуру до куба ($MT = MN = MH = a$).* 3. *OM – диагональ куба, $OM = a\sqrt{3}$.*

(Решается задача в)). Найдите расстояние от точки М на рисунке задачи а) до всех рёбер трёхгранного угла. Рис.6. 	По теореме о трёх перпендикулярах $MQ \perp OB$, $MP \perp OC$, $MR \perp OA$. Следовательно, отрезки MQ, MP, MR – есть расстояния от точки M до соответствующих рёбер трёхгранного угла. А так как они являются диагоналями граней куба, то все три расстояния равны $a\sqrt{2}$. Значит, точка М удовлетворяет условию задачи в), а длина отрезка $OM = a\sqrt{3}$.

Что запишем в тетрадях?	1. *$MQ \perp OB$, $MP \perp OC$, $MR \perp OA$.* 2. *Достраиваем получившуюся фигуру до куба, причём отрезки MQ, MP, MR являются диагоналями граней куба и равны $a\sqrt{2}$.* 3. *OM – диагональ куба, $OM = a\sqrt{3}$.*

Как видите, точка M равноудалена не только от граней, но и рёбер трёхгранного угла. Также очевидно, что любая точка прямой OM равноудалена от его граней и рёбер.	

Сравните углы, которые прямая OM составляет а) с рёбрами б) гранями куба. Найдите их значение.	Они равны, это следует из равенства прямоугольных треугольников. Угол между прямой OM и плоскостью грани равен: $\angle MOH = arccos\frac{a}{a\sqrt{3}} = arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, А угол между этой прямой и ребром OP равен: $\angle POM = arcctg\frac{a\sqrt{2}}{a} = arctg\sqrt{2}$.

Таким образом, мы решили задачи д) и е). Оказывается, прямая OM образует равные углы с гранями и рёбрами трёхгранного угла, и любая точка этой прямой равноудалена от его граней и рёбер. Оказывается, такая замечательная прямая существует для всех трёхгранных углов, все плоские углы которых равны. Запишем его: *Если плоские углы трёхгранного угла равны, то прямая, составляющая равные углы со всеми его гранями, составляет равные углы со всеми его рёбрами, а любая точка этой прямой равноудалена от его граней и его рёбер.* Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно, а на следующем уроке мы проверим доказательство.	 Рис.7.

Обратимся к задаче г). Для её решения можно использовать предыдущий рисунок (рис.7). Проведите биссектрисы плоских углов трёхгранного угла, например, ON и OH.	Отрезки биссектрис являются диагоналями граней куба. Рассмотрим треугольник NOH. Он является правильным: $\angle NOH = 60°$.

Что запишем в тетрадях по задачам г), д), е)?	1. *Диагонали граней куба являются отрезками биссектрис плоских углов трёхгранного угла.* 2. $\triangle LOH: OL = OH = LH, \angle LOH = 60°$. 3. *Диагональ куба образует равные углы с гранями и рёбрами трёхгранного угла.* 4. $\triangle MOH: \angle MOH = arccos\frac{a}{a\sqrt{3}} = arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. $\triangle POM: \angle POM = arcctg\frac{a\sqrt{2}}{a} = arctg\sqrt{2}$.

Эта задача и предыдущая несколько похожи. Чтобы находить углы или длину отрезков, необходимо поместить их в треугольники, другие геометрические фигуры, которые нам хорошо известны и мы знаем соотношения между их элементами. Поэтому, как мы с вами увидели на примере решения этой большой задачи, приём достраивания бывает очень полезен. В данной задаче мы с вами использовали достраивание до куба, но иногда можно использовать и достраивание до правильной пирамиды. Этот приём целесообразно использовать в одной из домашних задач.	

3. Рефлексивно-оценочный этап.

Какова была цель нашего урока?	Учиться решать задачи по теме «Трёхгранный угол» и на задачах подметить его новые свойства.

Достигли ли мы её?	Да.

Что мы узнали нового?	Мы узнали новое свойство трёхгранного угла: *Если плоские углы трёхгранного угла равны, то прямая, составляющая равные углы со всеми его гранями, составляет равные углы со всеми его рёбрами, а любая точка этой прямой равноудалена от его граней и его рёбер.* Мы узнали множество интересных свойств трёхгранного угла, у которого все плоские углы прямые, например, что угол между биссектрисами плоских углов такого угла равен 60°.

Какой новый метод решения задач мы выявили?	Прием достраивания до куба или до правильной пирамиды.

Все теоретические сведения о трёхгранном угле можно представить в виде таблицы, которую в вы видите на экране (раздаточная таблица 1, в конце урока она раздаётся всем учащимся).	Прием достраивания до куба или до правильной пирамиды.

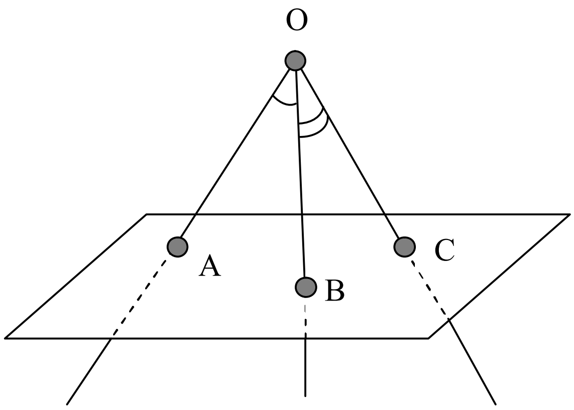
В домашней задаче №3 целесообразно применить приём достраивания до правильной четырехугольной пирамиды.	

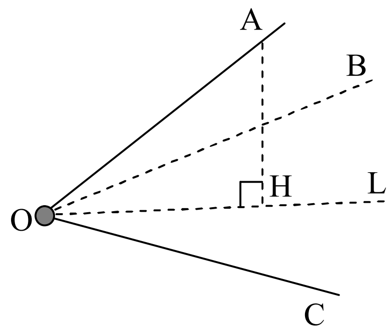
Домашнее задание:

1. *В каких пределах может меняться плоский угол трёхгранного угла, если два оставшихся соответственно равны: а)* $70°$ *и* $100°$ *б)* $130°$ *и* $150°$ *(учебник Шарыгина, с.* 60*, задача* 4*).*
2. *Величины всех плоских углов трёхгранного угла равны по* $60°$*. На одном из рёбер взята точка на расстоянии т от вершины угла. Найдите расстояние от этой точки до противоположной грани (учебник Скопеца, задача* $402(1)$*).*
3. *Все плоские углы выпуклого четырёхгранного угла равны* $60°$*. Найдите его двугранные углы при рёбрах, если они равны между собой (задачник для учебника Потоскуева, задача* 2.177*).*

Раздаточная таблица 1.

<u>Трёхгранный угол и его свойства</u>





$A, B, C \in \alpha$, $O \notin \alpha$,

A, B, C не лежат на одной прямой

$OABC$ - трёхгранный угол.

O - вершина трёхгранного угла

Лучи OA, OB, OC – рёбра трехгранного угла

$\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ – плоские углы трёхгранного угла

AOB, BOC, COA - грани трёхгранного угла

$\widehat{OA}$, $\widehat{OB}$, $\widehat{OC}$ - двугранные углы трёхгранного угла

Свойства трехгранного угла.

1. $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 2\pi$
2. $\angle AOB < \angle BOC + \angle COA$;
   $\angle BOC < \angle COA + \angle AOB$;
   $\angle COA < \angle AOB + \angle BOC$.

<u>Свойство трёхгранного угла с двумя равными плоскими углами</u>

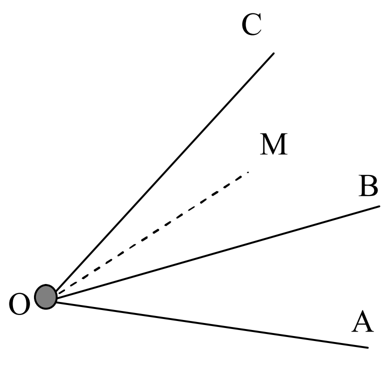
$OABC$ - трёхгранный угол

$\angle AOB = \angle COA$

OL – биссектриса $\angle BOC$

OL – проекция ребра OA на плоскость BOC.

<u>Свойство трёхгранного угла с тремя равными плоскими углами.</u>



Если $\widehat{OM, AOB} = \widehat{OM, AOC} = \widehat{OM, BOC}$, то $\widehat{OM, AO} = \widehat{OM, OC} = \widehat{OM, BO}$

Электронный журнал „Конференц-зал” www.konf-zal.com
РОСКОМНАДЗОР номер свидетельства ЭЛ № ФС 77-44540