

*Дворецкая Галина Зуфаровна*

*Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа имени Героя России В.В.Матвеева городского поселения Лесной Пушкинского муниципального района*

## ТОПОЛОГИЯ – ГЕОМЕТРИЯ ПОЛОЖЕНИЙ

В истории геометрии как науки топологические проблемы появились достаточно поздно, лишь в конце 18 века. Впоследствии оказалось, что «топологические предложения, несмотря на кажущуюся их неопределенность, связаны как раз с наиболее точными абстрактными математическими предложениями о величинах; именно с алгеброй, с теорией функций комплексного переменного и с теорией групп» [1, 289]. В настоящее время топологические исследования являются плодотворными и затрагивают различные науки.

С топологическими понятиями школьному учителю постоянно приходится иметь дело в курсе геометрии: граничные и внутренние точки, геометрическое тело и его поверхность и так далее. Точных определений этим понятиям в школьном курсе, как правило, не дается. Даже само понятие «топология» ни разу не всплывает. Вполне возможно, что при изучении планиметрии не требуется заострять на этом внимание. Ведь, так или иначе, при изучении геометрических фигур топологические понятия проявляются в таких фразах: «Окружность – это граница круга», «Геометрическая фигура – это часть плоскости, ограниченная последовательно соединенными отрезками» и т.п. В стереометрии же круг изучаемых геометрических фигур становится шире, уровень строгости курса повышается. В старших классах требуется более



подробно обсудить встречающиеся топологические понятия. Одно из топологических понятий – понятие геометрического тела. Чтобы ввести определение геометрического тела, надо сначала определить, что такое граничная и внутренняя точка фигуры, что такое поверхность, замкнутая область.

Такая ситуация заставила на элективных курсах в девятом классе провести несколько занятий по подготовке учеников к изучению стереометрии. Трудность задачи заключалась в том, что теоретические выкладки громоздки и уровень знаний учеников не позволяет им понять теорию в полном объеме. На уроках мы пошли другим путем, решая практические задачи, по мере надобности обращаясь к формулам и теоремам.

Вот одна из таких задач, известная под названием «Можно ли причесать ежа». Пусть в каждой точке сферы растет колючка. Спрашивается: можно ли причесать этого сферического ежа, т.е. уложить так колючки, чтобы каждая из них касалась сферы, и их направление менялось непрерывно при переходе от одной точки сферы к другой. Данная задача позволяет выйти на понятие геометрического тела, эйлерову характеристику поверхности и гомеоморфности многогранника и сферы. Знакомство с понятием геометрического тела приводит к теореме Эйлера. В свою очередь от эйлеровой характеристики многогранника несложно перейти к триангулированной сфере. Данный прием хорошо известен в геодезии и используется для более точных измерений земной поверхности. И вот оно решение задачи: причесывая ежа, т.е. убирая одну колючку за другой, на самом деле мы убираем ребра и вершины треугольников. Продолжая выполнять последовательно данную операцию, мы приходим к одной вершине. Из нее и будет торчать колючка (может остаться даже две колючки).

В копилку топологических задач можно добавить также задачу о кенигсбергских мостах или задачу коммивояжера. Выбор практических задач



зависит от учителя. Самое главное, что эти задачи знакомят с топологией, изучающей свойства геометрических фигур, связанные с их взаимным расположением.

Предложим один из инвариантов урока. Обозначим цель урока: дать понятие, что такое топология, научить видеть топологические образы в пространстве, развивать абстрактное восприятие мира в его непрерывном изменении через художественные образы, показать практическую направленность топологических задач.

Ход урока может быть представлен в следующем алгоритме.

*1. На доске выписаны слова «топонимика», «топология», «топография» и выписан перевод слов, составляющих данные слова “topos - место “, “онута – имя, название “, “grafos – изображаю, пишу, рисую “, “logos - наука “. Требуется ответить на вопрос: «Какой из перечисленных терминов является названием раздела геометрии?»*

*Учащиеся дают устные ответы с места, при этом принимаются как индивидуальные, так и ответы от группы.*

Данные понятия относятся к различным областям человеческих знаний. Топонимика из области лингвистики и филологии, топография

– понятие географическое, топология – один из разделов геометрии. Общим для них является «topos». Каждое из понятий определяет, как мы располагаем «место». Работа учащихся с этимологией слов редко проводится на уроках математики. Однако такая работа позволяет рассмотреть термин с разных сторон: происхождение, корень, область применения. Такая работа помогает понять, что вкладывалось изначально в определение, какие изменения претерпел термин в процессе употребления. Многие математические термины вошли в научный язык в эпоху Средневековья или Новое время, несмотря на латинские и греческие корни. Их авторы были философами не в меньшей степени, чем математиками; они вкладывали в название термина философский



смысл, считая математику основой философии, пытаюсь выразить математическим языком окружающий мир.

Современные ученики в недостаточной степени владеют навыком работы с определениями, не обращают внимания на его перевод в теоретической части параграфа. Так что такое начало привлекает внимание к терминам, к их значениям, к их применению. Задать вопрос без перевода отдельных частей слов было бы неверно. Вполне возможно, что ученики знают данные слова и сразу дадут ответ, ответ послужит мостом к обсуждению следующего вопроса. Но если ситуация сложится таким образом, что ни один из учеников не даст верного ответа, то начинается процесс осмысления терминов через перевод и выдвижение гипотез: где можно применить такие термины. Ход урока пошел по второму сценарию. Объединяя место и имя, мы с учениками вышли на название географического объекта, что позволило выдвинуть предположение о науке географических названий. Но с такой наукой на практики никто не встречался. Учащиеся выдвинули новую гипотезу, поставив на первое место «имя»: вспомнились имена прилагательные и существительные. Так «топонимика» была соотнесена с филологией. Больше всего споров было по термину «топография», который вызвал ассоциации с геометрическим чертежом. Чтобы работа не зашла в тупик, были предложены несколько видов чертежей как геометрических, так и топографических. Такой прием снял все вопросы, что считать топографическим чертежом и с чем соотнести «топографию». Таким образом, метод исключения позволил выйти на топологию.

*2. По группам раздается текст: «Применение в геометрии алгебраических методов, начавшееся с трудов Ферма и Декарта, одобрялось не всеми учеными. На первых порах, по словам Н.Бурбаки, аналитическая геометрия была громоздкой и неизящной. После красивых построений древних греков, оставалось чувство неудовлетворенности. Многие ученые пытались*



уберечь древнюю красивую науку от вторжения посторонних методов. Лейбниц, обращаясь к Гюйгенсу, писал, что он не доволен алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни красивых путей, ни наиболее красивых построений. Он утверждал, что нужен чисто геометрический *analysis situs* (от латинского *situs* – положение). Лейбниц не довел свою мысль до завершения, поэтому нам не известно, что он вкладывал в понятие «геометрический *analysis situs*» Эйлер, Гаусс и Риман считали, что термины Лейбница относятся к новой ветви геометрии, изучающей свойства геометрических фигур, связанные с их взаимным расположением. Возникнув из разрозненных задач и оформившись в новую область математики, она получила название топологии». Данный текст – своеобразный экскурс в историю возникновения топологии. Хотелось также, чтобы учащиеся обратили внимание на тот факт, что математики стремятся привнести красоту и гармонию в свою науку.

3. Перед раздачей следующего текста следует пояснение учителя: «Итак, одно из образных названий, которые можно дать топологии — это геометрия положений. Вот как видит данную геометрию Георгий Дмитриевич Гачев, писатель и ученый-культуролог, доктор философских наук».

*Прочитывается текст:*

«Лики константы и переменности можно увидеть в изображении серии треугольников, построенных на одном основании и с одной высотой и, значит, имеющих одинаковую плоскость».

Так и видишь, как изгибается тело, чтоб дотянуться. Итак, здесь одна опора (основание) и одна площадь, а поза, вид, фигура, индивидуальность и куда дотягиваешься рукой все разное. И разные углы, напряжения, деформация (трудность преодоления).



В изобретенном начертании проступают образы «предопределения» и «свободы воли» (как в христианской религии). Божеское здесь и основание и высота и площадь, т.е. основание – тело человека, высота – предел (дар, талант), площадь – жизнь, ее протяжение, судьба. А «человеческое» - всевозможные фигуры, которые можно начертить в этих пределах; варианты свободы воли. Свободны, значит, в разные стороны и по-разному дотягиваться, т.е. как я распоряжусь, что сделаю своей волей из заданного мне объема жизни и таланта.

Выходит, образ свой, личность свою, образ жизни, даль мы ткём, строим свою индивидуальность. Это не предопределенно, в этом и разнообразие. Наша инициатива и выдумка угодна Богу. А по избранному и построенному нашей волей образу и выстраивается и образ мира вокруг – «соответник».

Если выбрал дальнейшее положение вершины, тогда уж изволь весь пренапрячься в стремлении; углы и стороны привести в соответствие.

Если блюдешь определенную склонность (например, угол наклона  $40^\circ$ ), тогда будь добр сохранять стабильными и стороны, и форму жизни, и ее образ неподвижными. Если чтишь передвижение вершины, то изволь меняться непрерывно, быть живым и только, до конца».

Зачем на уроке математики нужны слова культуролога, человека далекого от точных наук? Односторонность получаемого образования не каждого приводит в смущение, но этот факт меня как учителя угнетает. Простое любопытство: как нас видят специалисты других наук, приводит к изысканиям, дающим интересный результат. Удаленность от предмета, его незнание, наивность человека приводит к тому, что он видит проблему под таким углом зрения и замечает те мелочи, которые не привлекают внимания профессионала. Этот текст позволяет взглянуть на топологию философски.

4. *Объявляется экскурсия в художественную галерею на выставку графики под названием «Топология-геометрия положений». Используются работы Анатолия Тимофеевича Фоменко, академика, профессора, доктора физико-математических наук, зав. кафедрой дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ. Рисунки подобраны по темам «Гомеоморфизмы», «Кристаллография», «Многогранники». «Волновая теория». Для проведения урока потребовались серьезные научные труды и университетские учебники. Но особую роль сыграли графические работы А.Т.Фоменко, взятые из его книги «Математика и миф сквозь призму геометрии». Эти работы, с одной стороны, помогли учащимся наглядно представить триангуляцию сферы, расслоенные пространства, выворачивание сферы наизнанку, различные виды деформаций. Как пишет сам Фоменко: «Бывает так, что доказательство строгого математического факта удается сначала разглядеть лишь в неформальных геометрических образах, и только потом удается оформить его как аккуратное логическое рассуждение» [2, 6]. С другой стороны, работы Фоменко выполнены не только как попытка сфотографировать изнутри своеобразный мир современной математики, но работы отражают второй слой информации. Речь идет о нематематических ассоциациях автора. Несомненно, в работах представлена **цивилизация** в культурологическом употреблении слова. Топология правит деформацией, а деформация есть старинный прием искусства. Олень в наскальной галерее деформирован бегом, детский рисунок деформирован видением времени, фигуры Микеланджело – напором энергии, фигуры Сальвадора Дали – спроектированным хаосом. Математика и цивилизация – это объединение и сопоставление заставляет взглянуть со стороны на мир, искать гармонию. Учащиеся обратили внимание на необычность рисунков, заметили детали, удивлялись и задавали вопросы. Удивления было больше, особенно при просмотре раздела «Гомеоморфизм». Наглядность того, как изменяется и*



разрушается человеческая фигура, подвергаясь гомеоморфизму, но остается узнаваемой, повергает первоначально в шок. Затем идут вопросы, как и что, произошло с этим человеком. Ученики предлагали свои варианты происходящего, чаще всего звучала мысль, что такое могло произойти, если человек подвергся проклятию или наказан за грехи. Трудно было вернуть их к математике и перевести беседу на обсуждение топологических особенностей рисунков. Многие замечено пытливый взглядом: непрерывность деформаций, отсутствие разрезов (кто-то высказал мысль, что такие деформации напоминают оригами в его классическом варианте, без ножниц и клея), графики функций, триангуляция шара. Ребята обмениваются впечатлениями и пытаются сформулировать ответ на вопрос, заданный учителем: «Что же такое топология, что она изучает?»

5. После того как учащиеся дают свои ответы на вопрос, раздается и прочитывается текст: *«Топология – раздел геометрии, изучающий общие свойства геометрических фигур, связанных прикосновением друг другу частей фигуры и с непрерывностью в самом общем виде, настолько общим, что свойства не меняются даже при сильных непрерывных деформациях».* Учащиеся могут сравнить и скорректировать свои ответы с тем определением, которое предлагается в университетском учебном пособии по геометрии. Этот текст дает возможность поставить точку в лингвистических, культурологических, художественных изысканиях учеников по определению термина «топология». В данном «силовом поле» шел процесс создания математического знания через творчество, целесообразность и свободу. Как показывает опыт человеческой культуры, любая форма человеческой деятельности становится эстетической, если она удовлетворяет данным критериям – творчеству, целесообразности и свободе. «Именно эти особенности человеческой деятельности выступают как показатели ее эстетической ценности, потому что в них выражена степень утверждения



человека в мире, притом человека не в какой-то односторонней определенности, а целостного» [3, 17].

6. *Следует пояснение учителя: «Теория топологии основывается на математическом анализе, понятиях непрерывности, теории графов, теории групп. Список можно продолжать, т.е. теоретические знания требуют твердой основы. Но вот с некоторыми практическими задачами топологии мы сегодня познакомимся и попробуем решить».* Первая часть урока, создающая необходимый настрой, позволила перейти к решению практических задач. Выбраны два вида практики: исследование листа Мебиуса и задача четырех красок. Здесь самое время поговорить о педагогических технологиях. На данном уроке сочетаются несколько видов технологий. Урок проходит в форме мастерской, и алгоритм урока прописан в соответствии с требованиями мастерской. Но на уроке использованы и другие технологии, а именно, объяснительно-иллюстративное обучение, технология «открытия знаний», исследовательская работа, творческая деятельность. В первой части урока идет работа по открытию знаний на уровне самопознания. Вторая часть урока связана с проведением исследования.

7. *Раздается лист Мёбиуса и цилиндрическая плоскость. Выполняются следующие задания на обоих телах: а) провести по центру полосу; б) провести по краю полосу; в) разрезать по середине. Результаты озвучиваются в ходе работы. Лист Мёбиуса – математическая неожиданность. Август Фердинанд Мёбиус в 1858 году подал в Парижскую академию наук работу об этом открытии, так что он может считаться одним из основоположников топологии. При изучении геометрии в рамках школьной программы определение поверхности как геометрического объекта не вводится. Однако в пространстве, где существуют объемные тела, понятие поверхности является одним из важнейших. Наглядных примеров, показывающих, что такое поверхность недостаточно. Почти все примеры, взятые из жизни, дают только*



представление о поверхности, но не дают понять свойства, присущие той или иной поверхности. Разобраться в этом вопросе поможет лист Мебиуса. Его модель сделать легко, ученики сами выполняют ее на уроке, достаточно взять полоску бумаги и склеить ее концы, предварительно повернув один из них на  $180^\circ$ . Перед нами модель односторонней поверхности с одним краем, в чем легко убедиться на практике. Кроме того, работа с листом Мебиуса показывает, что любая непрерывная деформация поверхности не меняет ее свойства быть односторонней или двусторонней.

8. *Раздается карта и ставится задача о четырех красках. Вполне возможно, что кто-нибудь из учащихся вспомнит теорему Эйлера. В любом случае эйлерова характеристика поверхности прилагается к карте, по формуле высчитывается необходимое количество красок. Работы вывешиваются в галерее.* Известная задача Гутри или проблема четырех красок: сколько красок понадобится для раскрашивания карты, если закрашивать граничащие соседние государства разным цветом. Решая эту задачу, мы сталкиваемся с понятием внешних и внутренних точек геометрической фигуры, с понятием границы. Учащиеся с удивлением встречают тот факт, что для раскрашивания карты на произвольной замкнутой поверхности количество красок зависит от эйлеровой характеристики поверхности. Не все сразу находят способ раскрашивания, некоторые из учеников упорно считают, что такое невозможно. И только полученный положительный результат, подтверждающий теоретические выкладки способен убедить самых «упрямых».

9. Заключительное слово учителя: «Математики прошлого, изучавшие свойства деформированных тел, внешние и внутренние области геометрических фигур не предполагали, что в современном мире на стыке наук появятся, и будут изучаться такие явления как топологическая анатомия – послойное изучение расположения органов и частей тела; топологическая



психология – теория психологического поля, описание статистических и динамических особенностей психики; топологическое пространство – множество, состоящее из элементов любой природы, рассматриваемых в их соотношении, например, мифологическое».

После решения практических задач ученики легче воспринимают азы теории, а именно понятие гомеоморфизма (преобразования взаимно однозначного и взаимно непрерывного). По моему мнению, возможно продолжение занятий по данной тематике в рамках элективного курса с увеличением объема теории в десятом классе на базе естественнонаучного профиля.

#### Литература:

1. Гильберт Д. Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. Фоменко А.Т. Математика и миф сквозь призму геометрии. М.: Издательство Московского университета, 2001.
3. Дорофеев Г.В., Миракова Т.Н. О предназначении математики // «Школа 2000...». Математика для каждого: технология, дидактика, мониторинг. Вып. 4. М.: УМЦ «Школа 2000...», 2002.

