Маховер Михаил Сергеевич
учитель математики, заслуженный учитель Российской Федерации
Государственное общеобразовательное учреждение «Гимназия №11»
Василеостровского района, г. Санкт-Петербурга
Жувикина Ирина Алексеевна
начальник отдела поддержки инновационной деятельности
Санкт-Петербургское государственное казенное учреждение
«Дирекция наукограда Российской Федерации г. Петергофа»

УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ: С2 - СТЕРЕОМЕТРИЯ
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ,
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.
МЕТОД РЕШЕНИЯ РЯДА ТИПОВЫХ ЗАДАЧ.

Урок №1

При решении задач типа С2 ЕГЭ по математике часто бывает необходимо найти расстояние от некоторой точки до некоторой плоскости или угол между прямой и плоскостью. Практика показывает, что попытки найти эти величины «в лоб» - непосредственным применением соответствующих определений и построением проекций точки или прямой на плоскость с последующим вычислением элементов треугольников, оказываются непосильными для школьников. Они или не могут провести грамотное построение с необходимыми обоснованиями, либо, проведя построение, не в состоянии довести вычисления до конечного результата из-за их громоздкости. Однако при решении конкретных задач часто оказывается вовсе не нужным искать, где окажется основание перпендикуляра, опущенного из некоторой точки на плоскость. Длину этого перпендикуляра (которая и есть по определению расстояние от точки до плоскости) можно вычислить из иных соображений, использовав одно замечательное свойство треугольной пирамиды.

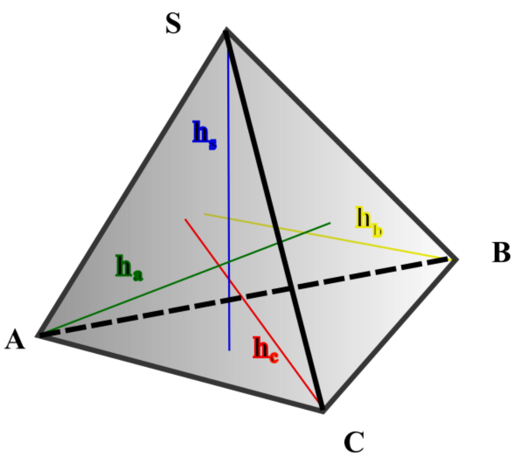

рис.1

Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$, рис.1. В отличие от всех других пирамид (четырехугольных, пятиугольных, и вообще любых $n-$ угольных при $n > 3$), треугольная пирамида остается треугольной пирамидой, какую бы из её граней не рассматривать в качестве основания. Поэтому условимся строго выполнять правило, по которому именование пирамиды начинается с её вершины (первая буква имени), следующие три буквы в произвольном порядке – имя треугольника, лежащего в основании, т.е. в той грани, которая лежит против выбранной вершины. Например, на рис. 1 слова «пирамида $ABCS$» означают, что основанием пирамиды является треугольник BCS, а точка A - вершина пирамиды. Очевидно, что для каждой треугольной пирамиды существует четыре варианта выбора вершины. Объем пирамиды на рис.1 можно вычислить также четырьмя способами:

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}h_s$$

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}S_{BCS}h_A$$

$$V_{BCSA}=\frac{1}{3}S_{CSA}h_B$$

$$V_{CSAB}=\frac{1}{3}S_{SAB}h_C \qquad (1)$$

Здесь S обозначает площадь треугольника, лежащего в основании пирамиды, а h- высота. Индекс указывает вершину пирамиды, из которой эта высота опущена. Очевидно, что

$$V_{SABC}=V_{ABCS}=V_{BCSA}=V_{CSAB}=V. \qquad (2)$$

При решении задач часто бывает возможным так «повернуть» пирамиду, что её объем легко вычисляется. Пусть, например, нам удалось выразить объем как

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}S_{BCS}h_A=V. \qquad (3)$$

Если по условию задачи требуется найти расстояние от точки S до плоскости ABC, то на основании второго из соотношений (1) и формулы (2) оно будет равно

$$h_S=\frac{3V}{S_{ABC}}. \qquad (4)$$

Найти площадь треугольника, стоящую в знаменателе правой части (4), как правило, существенно проще, чем искать основание высоты на плоскости BCS.

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

Отметим, что при таком подходе нам нигде не требовалось знать положение основания высоты, опущенной из вершины S. В ряде задач аналогичный прием может быть применен для определения угла между прямой и плоскостью. Обратимся к рис.2. По определению углом между прямой SA и плоскостью α является угол γ между этой прямой и её ортогональной проекцией AD на эту плоскость. Рассмотрим пирамиду $SABC$. Если нам удалось вычислить её объем V, например, согласно соотношению (3) и высоту h_s согласно (4), то

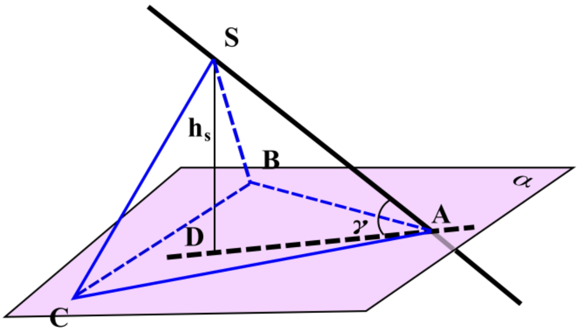

рис.2

$$\sin\gamma = \frac{h_s}{AS} = \frac{3V}{AS \cdot S_{ABC}}. \qquad (5)$$

Опять, нам не потребовалось знать, как конкретно расположена проекция AD на плоскости α.

Приведем еще одно соотношение для объема многогранника, использование которого иногда серьезно облегчает решение стереометрических задач. Рассмотрим многогранник, имеющий n граней, описанный около сферы радиуса r (рис. 3). По определению это означает, что все грани многранника

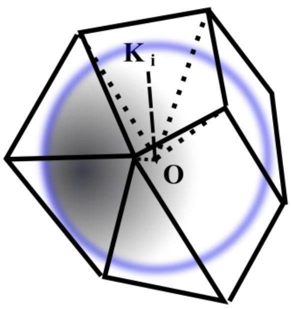

рис.3

касаются сферы в точках, которые обозначены на рисунке как K_i. Соединим центр сферы O с вершинами многогранника отрезками. Многогранник при этом разбился на n непересекающихся пирамид. На рис. 3. обозначена одна из них - $i-$ая. Обозначив объем $i-$ой пирамиды через V_i и просуммировав эти величины по индексу i от 1 до n для объема многраннника получим

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i. \qquad (6)$$

Радиус сферы OK_i, проведенный в точку касания K_i перпендикулярен касательной плоскости – плоскости грани, которая является основанием $i-$ой пирамиды, а сам радиус OK_i является ее высотой. Следовательно, для объема $i-$ой пирамиды V_i имеем $V_i = r\,S_i$, где через S_i обозначена площадь $i-$ой грани многогранника. На основании формулы (6) для общего объема многогранника получим

$$V = \sum_{i=1}^{n} r\,S_i = r\sum_{i=1}^{n} S_i = r\,S, \qquad (7)$$

где S обозначает полную площадь поверхности многогранника. Соотношение (7) бывает полезно при решении стереометрических задач в случаях, когда требуется найти радиус вписанной в многогранник сферы, но при этом оказывается затруднительным (или невозможным) построить точки касания с гранями и связать радиус с другими параметрами задачи. Если же из дополнительных соображений можно найти объем и площадь полной поверхности многогранника, то формула (7) позволяет вычислить радиус вписанной сферы без явного построения точек касания.

Проиллюстрируем возможности, даваемые этими фактами, для решения задач типа С2, реально встречающихся в ЕГЭ по математике.

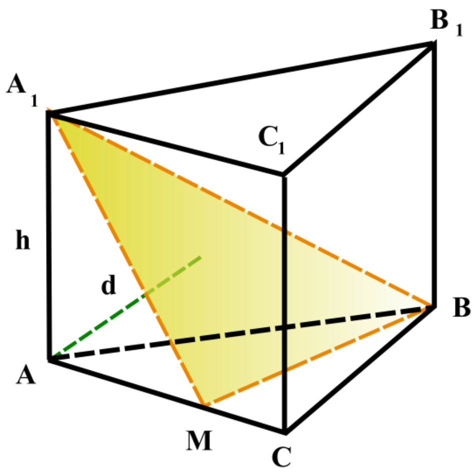

рис.4

Задача 1. [1] Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $a = \sqrt{14}$ и высотой $h = \sqrt{6}$. Точка M лежит на ребре основания AC, причем $AM \div MC = 2 \div 1$. Определить расстояние от точки A до плоскости A_1BM и угол между прямой AA_1 и плоскостью A_1BM.

Решение. 1. Расстояние от точки A до плоскости A_1BM (рис. 4) равно высоте d пирамиды AA_1BM, опущенной из вершины A на основание A_1BM. Вычислим объем пирамиды AA_1BM двумя способами:

$$V = V_{A_1MB} = \tfrac{1}{3}S_{AMB}\,AA_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}AM\cdot AB\cdot\sin\measuredangle MAB\cdot AA_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{a^2}{2\sqrt{3}}\cdot h = \tfrac{7\sqrt{2}}{3} \quad (8)$$

$$V = V_{AA_1BM} = \tfrac{1}{3}S_{A_1BM}d. \quad (9)$$

2. Применяя теорему Пифагора и теорему косинусов определим стороны треугольника A_1BM:

$$A_1M = \sqrt{h^2 + \tfrac{4}{9}a^2} = \sqrt{6 + \tfrac{4}{9}\cdot 14} = \frac{\sqrt{110}}{3}$$

$$A_1B = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{6 + 14} = \sqrt{20}$$

$$MB = \sqrt{h^2 + a^2 - 2\tfrac{a^2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7a^2}{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$$

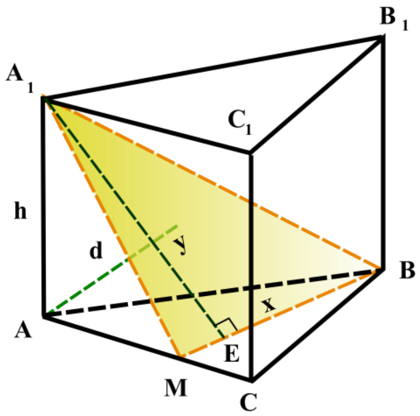

рис.4а

Найдем площадь треугольника A_1BM. Построим высоту A_1E. Обозначим $EB = x,\ A_1E = y$ (рис.4а). Применяя теорему Пифагора к треугольникам A_1ME и A_1BE с учетом найденных длин сторон треугольника A_1BM, получим систему алгебраических уравнений для определения величин x и y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \left(\frac{7\sqrt{2}}{3} - x\right)^2 + y^2 = \frac{110}{9} \end{cases}$$

Раскрывая скобки во втором уравнении и почленно вычитая первое из второго, найдем $x = 2\sqrt{2},\ y = 2\sqrt{3}$. Следовательно, для площади треугольника A_1BM имеем $S_{A_1BM} = \frac{1}{2}BM\,y = \frac{1}{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$.

3. Используя найденную площадь треугольника A_1BM в (8) и (9), найдем расстояние от точки A до плоскости A_1BM : $d = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$. Для синуса угла между прямой AA_1 и плоскостью A_1BM тогда получим

$\sin(AA_1, A_1BM) = \frac{d}{AA_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: расстояние A до плоскости A_1BM равно $\sqrt{3}$, угол между прямой AA_1 и плоскостью A_1BM равен $\frac{\pi}{4}$.

Задача 2. [1] В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны $\sqrt{10}$. Точка M - середина ребра BS. Найти расстояние от вершины пирамиды до плоскости, проходящей через прямую AM параллельно диагонали основания BD.

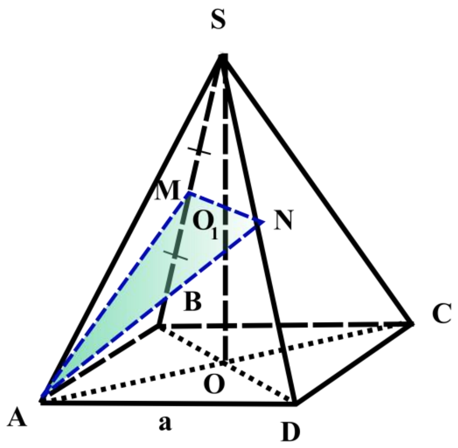

рис.5

Решение. 1. В плоскости BDS строим прямую $MN \parallel BD$ (рис. 5). По теореме Фалеса прямая MN является средней линией треугольника BDS, и, следовательно, точка N - середина ребра DS. Рассмотрим плоскость AMN. Прямая MN лежит в этой плоскости и по построению параллельна прямой BD, не лежащей в этой плоскости. Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости $AMN \parallel BD$. Таким образом, требуется найти расстояние от точки S до плоскости AMN, обозначим его через d. Длину ребра пирамиды обозначим через a.

2. Рассмотрим пирамиду $SAMN$. Величина d равна высоте пирамиды $SAMN$, опущенной из вершины S на плоскость основания AMN. Выразим объем этой пирамиды двумя способами:

$$V = V_{SAMN} = \frac{1}{3} S_{AMN} d = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} MN \cdot AO_1 \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{8} \cdot d \quad (10)$$

$$V = V_{ASMN} = \frac{1}{3} S_{SMN} \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} MN \cdot O_1S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) найдем $d = \frac{a}{\sqrt{10}} = 1$. Ответ: расстояние равно 1.

Урок №2

Задача 3. [2] В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 2 и 1 , боковое ребро 2. Найти расстояние между диагональю параллелепипеда и скрещивающейся с ней диагональю основания.

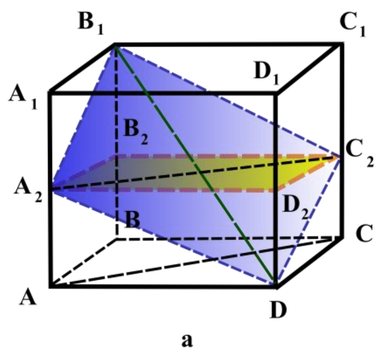

рис.6

Решение. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображенный на рис. 6. По условию $A_1A = AD = 2$ и $A_1B_1 = 1$. Требуется определить расстояние между прямыми B_1D и AC.

1. Расстояние между прямой AC и скрещивающейся с ней прямой B_1D равно расстоянию от прямой AC до некоторой плоскости, параллельной прямой AC и содержащей прямую B_1D.

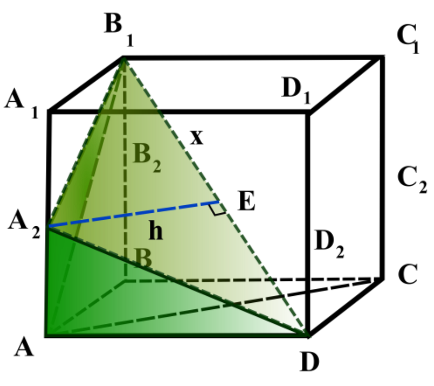

рис.7

Покажем, что такой плоскостью является плоскость $A_2B_1C_2D$, где A_2 и C_2 - середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно. По построению $AA_2 = CC_2$, по условию - $AA_2 \parallel CC_2$, следовательно, по признаку AA_2CC_2 – параллелограмм и $AC \parallel A_2C_2$. Таким образом, плоскость $A_2B_1C_2D$ содержит прямую A_2C_2, параллельную не принадлежащей этой плоскости прямой AC. Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости, $AC \parallel A_2B_1C_2D$. Найдем расстояние d от точки A до плоскости $A_2B_1C_2D$. Эта величина d и будет искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми.

2. Рассмотрим пирамиду AA_2B_1D (рис. 7). Выразим её объем двумя способами:

$$V = V_{B_1AA_2D} = \tfrac{1}{3} S_{AA_2D}\, A_1B_1 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \tfrac{1}{3} \qquad (12)$$

$$V = V_{AA_2B_1D} = \tfrac{1}{3} S_{A_2B_1D} \cdot d \qquad (13)$$

3. По теореме Пифагора найдем стороны треугольника A_2B_1D:

$$A_2B_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$A_2D = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad (14)$$

$$B_1D = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Найдем площадь треугольника A_2B_1D. Проведем высоту A_2E. Обозначим $A_2E = h$, $B_1E = x$. Используя (14) и применяя теорему Пифагора для величин h и x получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 2 \\ (3 - x)^2 + h^2 = 5 \end{cases}.$$

Почленно вычитая из второго уравнения первое, найдем $x = 1, h = 1$. Тогда

$$S_{A_2B_1D} = \tfrac{1}{2} B_1D \cdot h = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \tfrac{3}{2}. \qquad (15)$$

4. Окончательно, из (12), (13) и (15), найдем $d = \frac{2}{3}$.

Ответ: расстояние между скрещивающимися прямыми равно $\frac{2}{3}$.

На школьных уроках математики обычно не доказывают тот факт, что центр вписанного в куб шара лежит на главной диагонали куба, но активно его используют при решении стереометрических задач. Для того, чтобы нам избежать этого при рассмотрении следующей задачи, докажем лемму.

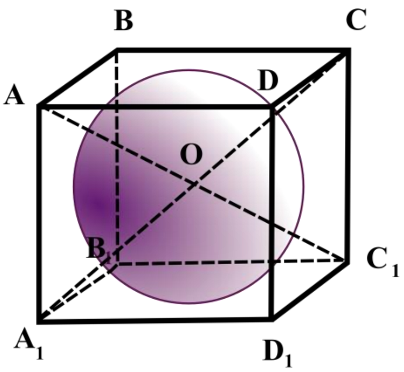

рис.8

Лемма. Шар с центром O вписан в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, $O \in AC_1$ и $AO = OC_1$.

Доказательство. Рассмотрим рис.8. Точки касания шара с гранями $ABCD$ и AA_1D_1D равноудалены от центра шара. Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является биссекторная плоскость. Для двугранного угла, образованного плоскостями $ABCD$ и AA_1D_1D, такой плоскостью является плоскость ADC_1B_1, следовательно, $O \in ADC_1B_1$. Точки касания шара с гранями $ABCD$ и AA_1D_1D равноудалены от центра шара. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, приходим к выводу, что $O \in AA_1CC_1$. Плоскости ADC_1B_1 и AA_1CC_1 имеют две общие точки A и C_1, следовательно, линия пересечения этих плоскостей проходит через них, и в пределах куба совпадает с его главной диагональю AC_1. Так как центр шара O лежит на каждой из плоскостей ADC_1B_1 и AA_1CC_1, то он лежит на линии их пересечения, то есть на главной диагонали AC_1. Первая часть утверждения леммы доказана. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что центр шара O лежит также и на главной диагонали A_1C, а, следовательно, на пересечении главных диагоналей AC_1 и A_1C. По теореме, главные диагонали куба точкой пересечения делятся пополам, что и доказывает второе утверждение леммы.

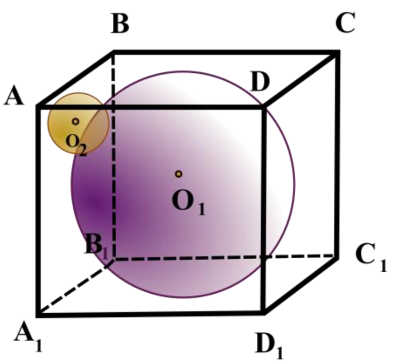

рис.9

Задача 4. [2] В куб вписали шар. Затем в этот же куб вписали другой шар так, что он касается первого шара и трех граней куба, содержащих одну общую вершину куба. Найти объем меньшего шара, если боковое ребро куба равно $\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

Решение.

Общее расположение тел показано на рис. 9.

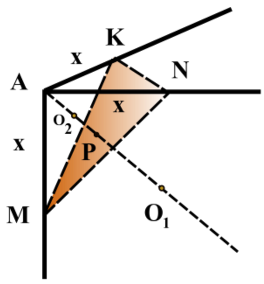

рис.10

1. Рассмотрим общую касательную плоскость к шарам, рис.10. Точку касания обозначим P, точки пересечения касательной плоскости с ребрами куба – M, N, K. Пусть длина отрезков $AM =$

$AN = AK = x$, тогда $MN = KN = KM = x\sqrt{2}$. Если радиус большего шара R, то $R = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$.

2. Найдем длину отрезка AP. Очевидно, что величина $2(AP+R)$ совпадает с длиной главной диагонали куба и, следовательно, равна $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2$. Учитывая найденное значение R, вычислим

$$AP = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2}{2} - \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}+1.$$

3. Выразим величину x через длину отрезка AP. Для этого рассмотрим пирамиду $AMNK$. Найдем её объем двумя способами:

$$V = V_{KAMN} = \frac{1}{3} S_{AMN}\, AK = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot x = \frac{1}{6} x^3 \qquad (16)$$

$$V = V_{AMNK} = \frac{1}{3} S_{MNK}\, AP = \frac{1}{3} \frac{(x\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} AP = \frac{x^2\sqrt{3}}{6} AP \qquad (17)$$

откуда получим

$$x = \sqrt{3}\, AP = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1). \qquad (18)$$

4. Меньший шар является вписанным в пирамиду $AMNK$. Для определения радиуса r этого шара воспользуемся соотношением (7). Найдем площадь полной поверхности пирамиды $AMNK$:

$$S = S_{MNK} + S_{MNA} + S_{KNA} + S_{MKA} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} x^2. \qquad (19)$$

На основании (16),(18) и (19) и с учетом (7), найдем

$$r = \frac{x}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = 1.$$

Поскольку искомый объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, то окончательно имеем:

Ответ: объем шара $\frac{4}{3}\pi$.

Заметим, что описанные приемы решения стереометрических задач могут оказаться полезными и при решении ряда весьма сложных алгебраических задач, в том числе даже олимпиадных. Например,

Задача 5. [3] Доказать, что если $x + y + z = 1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

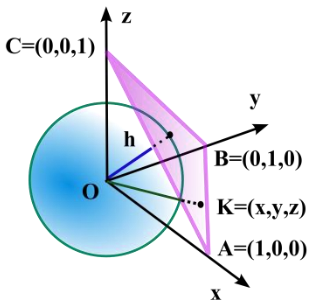

рис.11

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$, (рис. 11). Точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $x + y + z = 1$, образуют плоскость, проходящую через точки $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$. На рисунке изображена часть этой плоскости, лежащая в первом октанте. Квадрат расстояния от любой точки плоскости $K = (x, y, z)$ до начала координат O дается выражением $OK^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Минимальное значение h этого расстояния достигается в том случае, если $OK \perp ABC$, то есть когда точка K является основанием высоты пирамиды $OABC$, опущенной из вершины O на грань ABC. Найдем эту высоту, выразив объем пирамиды двумя способами:

$$V = V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} h = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\sqrt{2}\right)^2 h = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} h, \qquad (20)$$

$$V = V_{BOAC} = \frac{1}{3} S_{OAC}\, OB = \frac{1}{3} \frac{1}{2} 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{6}. \qquad (21)$$

Из соотношений (20) и (21) находим, что $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$.. Следовательно, наименьший квадрат расстояния от точек плоскости ABC до начала координат O равен $\frac{1}{3}$, что и доказывает утверждение задачи.

Литература

1. Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / авт.-сост. А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др. – М: АСТ: Астель, 2010. – 318, [2] с. (Единый государственный экзамен)
2. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010 / Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабукова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2009.- 480с. – («Готовимся к ЕГЭ»)
3. И.Л. Бабинская. Задачи математических олимпиад. – М: Наука, Главная редакция физико - математической литературы, 1975, 112с.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru